適性試験　選択問題（数学）

$\boxed{1}$ 自然数の 2 乗となる数を平方数という.

(1) 自然数 a, n, k に対して, $n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき,

$$a \geqq k^2+2k-1$$

が成り立つことを示せ.

(2) $n(n+1)+14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ.

(3) $n(n+1)+a$ が平方数となるような自然数 n が 4 つ以上ある最小の自然数 a を求めよ.

$\boxed{2}$ 座標平面上の 3 点 A(1,0), B(3,1), C(2,2) を頂点とする $\triangle$ABC の内部および境界を T とおく. 実数 a に対して, 条件

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2 \leqq a$$

をみたす座標平面上の点 P の全体を D とする. ただし, AP は点 A と点 P の距離を表す.

(1) D が少なくとも 1 つの点 P を含むような a の値の範囲を求めよ.

(2) D が T を含むような a の値の範囲を求めよ.

(3) (1) のもとで, D が T に含まれるような a の値の範囲を求めよ.

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ $(x \geqq 1)$ と関数 $g(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ $(t \geqq 0)$ を考える. ただし, e は自然対数の底とする.

(1) $g(t) \geqq 1$ を示せ.

(2) $a>0$ とする. 定積分 $\displaystyle\int_0^a f(g(t))g'(t)dt$ を求めよ.

(3) 座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする. $p>1$ とし, C 上の点 $(p, f(p))$ における接線を ℓ とする. このとき, 曲線 C, 直線 ℓ, x 軸で囲まれた図形の面積 $S(p)$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{\log p}$ を求めよ.